Задачи

Коэффициенты отражения и прохождения

Задача 1 Показать, что амплитуды линейно-независимых решений стационарного уравнения Шрёдингера $\psi(x) = a\,e^{ikx} + b\,e^{-ikx}$ с энергией E в присутствие одномерного кусочно-постоянного потенциала вида

$$U_s(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } x < x_1 \\ U_2 \text{ при } x > x_1 \end{cases}$$

связаны следующим матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)\,e^{i(-k_1+k_2)x_1} & (k_1 - k_2)\,e^{i(-k_1-k_2)x_1} \\ (k_1 - k_2)\,e^{i(\,k_1+k_2)x_1} & (k_1 + k_2)\,e^{i(\,k_1-k_2)x_1} \end{pmatrix},$$

где $k_1 = \sqrt{2m\,(E - U_1)}/\hbar$, $k_2 = \sqrt{2m\,(E - U_2)}/\hbar$. Задача рассмотрена в [1].

Задача 2 Показать, что амплитуды линейно-независимых решений стационарного уравнения Шрёдингера $\psi(x) = a\,e^{ikx} + b\,e^{-ikx}$ с энергией E в присутствие одномерного $\delta-$образного потенциала вида

$$U_\delta(x) = S\delta(x_1) + \begin{cases} U_1 \text{ при } x < x_1 \\ U_3 \text{ при } x > x_1 \end{cases}$$

связаны следующим матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \hat{T} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_3 + is)\,e^{i(-k_1+k_3)x_1} & (k_1 - k_3 + is)\,e^{i(-k_1-k_3)x_1} \\ (k_1 - k_3 - is)\,e^{i(\,k_1+k_2)x_1} & (k_1 + k_3 - is)\,e^{i(\,k_1-k_3)x_1} \end{pmatrix},$$

где $k_1 = \sqrt{2m\,(E - U_1)}/\hbar$, $k_3 = \sqrt{2m\,(E - U_2)}/\hbar$, $s = 2m\,S/\hbar^2$.

Задача 3 С помощью формализма трансфер–матрицы получить выражение для трансфер-матрицы для случая наклонного падения частицы на потенциале $U_s(x)$ (см. задачу 1).

Задача 4 С помощью формализма трансфер–матрицы исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на потенциале $U_s(x)$ (см. задачу 1) от энергии налетающей волны E для случая нормального падение частицы на барьер. Исследовать асимптотические зависимости при $E \to U_2$ и $E \gg U_2$. Задача рассмотрена в [17].

Задача 5 * С помощью формализма трансфер–матрицы исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на потенциале $U_s(x)$ (см. задачу 1) от энергии налетающей волны E и угла падения θ для случая наклонного падение частицы на барьер.

Задача 6 С помощью формализма трансфер–матрицы исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на потенциальном барьере $U_b(x)$ следующего вида

$$U_b(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } x < x_1 \\ U_2 \text{ при } x_1 < x < x_2 \\ U_3 \text{ при } x > x_2 \end{cases}$$

от энергии налетающей волны E. Рассмотреть случай нормального падения частицы на барьер. Исследовать асимптотические зависимости при $E \ll U_2$, $E \to U_2$ и $E \gg U_2$ ($U_1 < U_2$). Задача частично рассмотрена в [1, 17].

Задача 7 * С помощью формализма трансфер–матрицы исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на потенциальном барьере $U_b(x)$ (см. задачу 6) от энергии налетающей волны E и угла падения θ для случая наклонного падения частицы на барьер.

Задача 8 Для потенциального барьера $U_\delta(x)$ (см. задачу 2) получить матрицу распространения из соответствующих выражений для трансфер–матрицы прямоугольного барьера U_b предельным переходом $U_2 \to \infty$, $w = x_2 - x_1 \to 0$, $S = U_2 \times w = \text{const}$.

Задача 9 Исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при рассеянии частицы на потенциальном барьере $U_\delta(x)$ (см. задачу 2) от энергии налетающей волны E для нормального падения частицы.

Задача 10 С помощью формализма трансфер–матрицы для потенциального барьера $U_{2\delta}(x)$ следующего вида

$$U_{2\delta}(x) = S_1\delta(x_1) + S_2\delta(x_1 - a)$$

исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при от энергии налетающей волны E (нормальное падение). Обсудить эффективность резонансного прохождения от отношения S_1/S_2. Задача рассмотрена в [17].

Задача 11 Для двухбарьерной структуры $U_{2b}(x)$ следующего вида

$$U_{2b}(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } x < x_1 \\ U_2 \text{ при } x_1 < x < x_2 \\ U_3 \text{ при } x_2 < x < x_3 \\ U_4 \text{ при } x_3 < x < x_4 \\ U_5 \text{ при } x > x_4 \end{cases}$$

исследовать зависимость коэффициентов отражения и прохождения при от энергии налетающей волны E (нормальное падение). Качественно обсудить эффективность резонансного прохождения от отношения U_2/U_4. Задача рассмотрена в [1].

Задача 12 Показать, что коэффициент прохождения для двухбарьерной структуры $U_{2-b}(x)$ (см. задачу 11) при $E \simeq E_n$ имеет лоренцевский вид

$$t(E) = \frac{\Gamma^2}{\beta^2(E - E_n)^2 + \Gamma^2},$$

где E_n – уровни квазистационарных состояний. Обсудить зависимость ширины линии резонансного прохождения Γ от параметров двухбарьерной структуры.

Задача 13 В квазиклассическом приближении рассчитать вероятность отражения и прохождения частицы от потенциального барьера $U(x)$. Задача рассмотрена в [18].

Задача 14 В квазиклассическом приближении рассчитать вероятность отражения и прохождения частицы от треугольного потенциального барьера $U(x) = 0$ при $x < 0$ и $U(x) = U_0 - Fx$ при $x > 0$. Задача рассмотрена в [18, 17].

Спектр стационарных локализованных состояний

Задача 15 С помощью формализма матрицы распространения исследовать энергетический спектр E_n частицы, локализованной в асимметричной одномерной потенциальной яме конечной высоты

$$U_w(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } x < x_1 \\ U_2 \text{ при } x_1 < x < x_2 \\ U_3 \text{ при } x_2 < x < x_3 \end{cases}$$

Для случая симметричной потенциальной ямы $U_1 = U_3$ исследовать асимптотики $U_1 \gg U_2$ (яма с бесконечно высокими стенками) и $U_1 \to U_2$ (мелкая яма). Задача частично рассмотрена в [18, 17].

Задача 16 С помощью формализма матрицы распространения исследовать энергетический спектр E_n частицы, локализованной в одномерном потенциале вида $U_\delta = S\delta(x)$, $S < 0$. Задача частично рассмотрена в [17].

Задача 17 С помощью формализма матрицы распространения исследовать энергетический спектр E_n частицы в сферически–симметричном $s-$состоянии, локализованной в сферической потенциальной яме

$$U_r(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } r < r_1 \\ U_2 \text{ при } r > r_1 \end{cases}$$

Задача рассмотрена в [2].

Задача 18 С помощью формализма матрицы распространения исследовать энергетический спектр E_n частицы, локализованной в туннельно–связанных потенциальных ямах

$$U_{2w}(x) = \begin{cases} \infty \text{ при } x < x_1 \\ U_2 \text{ при } x_1 < x < x_2 \\ U_3 \text{ при } x_2 < x < x_3 \\ U_4 \text{ при } x_3 < x < x_4 \\ \infty \text{ при } x > x_4 \end{cases}$$

Обсудить вопрос зависимости расщепления уровней от высоты (U_3) и ширины ($w_3 = x_3 - x_2$) разделяющего барьера.

Задача 19 В квазиклассическом приближении рассчитать уровни энергии частицы, локализованной в потенциальной яме $U(x)$. Задача рассмотрена в [18].

Задача 20 В квазиклассическом приближении рассчитать уровни энергии частицы в двух туннельно–связанных потенциальных ямах. Задача рассмотрена в [18].

Задача 21 Оценить период осцилляций электронной плотности в туннельно–связанных потенциальных ямах. Задача рассмотрена в [1].

Распад квазистационарных состояний

Задача 22 Показать, что для квантово-механической систем с условиям излучения ($\psi \propto e^{ikr}/r$ при $r \to \infty$, $k > 0$) невозможны стационарные состояния. Задача рассмотрена в [2].

Задача 23 Для двухбарьерной структуры $U_{2b}(x)$ (см. задачу 11) определить спектр существования квазистационарных состояний и скорость распада таких состояний.

Задача 24 С помощью формализма матрицы распространения исследовать энергетический спектр E_n частицы в сферически–симметричном $s-$состоянии, локализованной внутри сферического потенциального барьера

$$U_r(x) = \begin{cases} U_1 \text{ при } r < r_1 \\ U_2 \text{ при } r_1 < r < r_2 \\ U_3 \text{ при } r > r_2 \end{cases}$$

Вычислить скорость распада такого квазистационарного состояния. Задача рассмотрена в [2].

Задача 25 В квазиклассическом приближении вычислить проницаемость кулоновского барьера $U(x) = -U_0$ при $x < x_1$ и $U(x) = \alpha/x$ при $x > x_1$. Используя это решение оценить вероятность альфа-распада атома в основном s-состоянии. Задача рассмотрена в [18].

Туннельный эффект в нормальных системах

Задача 26 Вывести выражение для вольт-амперной характеристики туннельного перехода, состоящего из двух нормальных металлов, при $T = 0$.

Задача 27 Рассчитать вольт-амперную характеристику туннельного перехода, состоящего из двух нормальных металлов, при $T = 0$ и при малых смещения. Оценить туннельное сопротивление такой системы.

Задача 28 Рассчитать вольт-амперную характеристику туннельного перехода, состоящего из двух нормальных металлов, при $T = 0$ и при больших смещениях.

Задача 29 Рассчитать вольт-амперную характеристику туннельного перехода, состоящего из двух нормальных металлов и квантовой ямы с дискретным энергетическим спектром (резонансно-туннельный диод), при $T = 0$. Задача рассмотрена в [14].

Туннельный эффект в сверхпроводящих системах

Задача 30 Рассчитать вольт-амперную характеристику туннельного перехода, состоящего из сверхпроводника и нормального металла, при $T = 0$.

Задача 31 Рассчитать зависимость полного джозефсоновского тока через короткий джозефсоновский контакт от внешнего магнитного поля. Задача рассмотрена в [11, 22].

Задача 32 Решить задачу о структуре джозефсоновского вихря в широком джозефсоновском переходе. Задача рассмотрена в [11, 22].

Задача 33 В рамках модели резистивно-шунтированного перехода рассчитать вольт-амперную характеристику короткого джозефсоновского перехода для заданного стороннего тока (задача о нестационарном эффекте Джозефсона). Задача рассмотрена в [11]

Задача 34 В рамках модели резистивно-шунтированного перехода рассчитать вольт-амперную характеристику джозефсоновского перехода для заданного переменного напряжения (задача о ступеньках Шапиро). Задача рассмотрена в [11].

Задача 35 В рамках модели резистивно-шунтированного перехода рассчитать вольт-амперную характеристику джозефсоновского перехода для заданного переменного напряжения (задача о нестационарном эффекте Джозефсона). Задача рассмотрена в [11].

Formularium

$$\hat{T} = \frac{1}{2k_1}\begin{pmatrix} (k_1+k_2)\,e^{i(-k_1+k_2)x_1}, & (k_1-k_2)\,e^{i(-k_1-k_2)x_1} \\ (k_1-k_2)\,e^{i(\,k_1+k_2)x_1}, & (k_1+k_2)\,e^{i(\,k_1-k_2)x_1} \end{pmatrix}.$$

$$r = \left|\frac{T_{21}}{T_{11}}\right|^2, \qquad t = \frac{k_3}{k_1}\left|\frac{1}{T_{11}}\right|^2$$

$$\hat{T} = \frac{1}{2k_1}\begin{pmatrix} (k_1+k_2+is)\,e^{i(-k_1+k_2)x_1}, & (k_1-k_2+is)\,e^{i(-k_1-k_2)x_1} \\ (k_1-k_2-is)\,e^{i(\,k_1+k_2)x_1}, & (k_1+k_2-is)\,e^{i(\,k_1-k_2)x_1} \end{pmatrix}.$$

$$t = \frac{16k_1\kappa_2^2k_3}{(k_1^2+\kappa_2^2)(\kappa_2^2+k_3^2)}\,\frac{1}{|e^{i\varphi_1+i\varphi_3}\,e^{\kappa_2w_2}-e^{-i\varphi_1-i\varphi_3}\,e^{-\kappa_2w_2}|^2}.$$

$$t = \frac{16k_1\kappa_2^2k_3}{(k_1^2+\kappa_2^2)(\kappa_2^2+k_3^2)}\,e^{-2\kappa_2w_2}.$$

$$k_2w_2 = \varphi_1+\varphi_3+\pi n = \mathrm{arctg}(\kappa_2/k_1)+\mathrm{arctg}(\kappa_2/k_3)+\pi n.$$

$$t = \frac{256\,k_1\,\kappa_2^2\,k_3^2\,\kappa_3^2\,k_5}{(k_1^2+\kappa_2^2)\,(\kappa_2^2+k_3^2)\,(k_3^2+\kappa_4^2)\,(\kappa_4^2+k_5^2)}\,\frac{1}{|K|^2}$$

$$K = e^{-ik_3w_3}\,\left\{e^{i\varphi_2+i\varphi_3}\,e^{\kappa_2w_2}-e^{-i\varphi_2-i\varphi_3}\,e^{-\kappa_2w_2}\right\}\left\{e^{i\varphi_4+i\varphi_5}\,e^{\kappa_4w_4}-e^{-i\varphi_4-i\varphi_5}\,e^{-\kappa_4w_4}\right\}+$$
$$+e^{+ik_3w_3}\,\left\{-e^{i\varphi_2-i\varphi_3}\,e^{\kappa_2w_2}+e^{-i\varphi_2+i\varphi_3}\,e^{-\kappa_2w_2}\right\}\left\{e^{-i\varphi_4+i\varphi_5}\,e^{\kappa_4w_4}-e^{+i\varphi_4-i\varphi_5}\,e^{-\kappa_4w_4}\right\}$$

$$t = \frac{\Gamma^2}{\beta^2(E-E_n+\varepsilon_0)^2+\Gamma^2}, \qquad \Gamma \simeq 8\frac{k_1\kappa_2^2k_3}{(k_1^2+\kappa_2^2)(\kappa_2^2+k_3^2)}\,e^{-2\kappa w}.$$

$$\left\{e^{i\varphi_3}\,e^{-ik_2w_2}-e^{-i\varphi_3}\,e^{+ik_2w_2}\right\}^2 = e^{-2\kappa_3w_3}\,\left\{e^{-i\varphi_3}\,e^{-ik_2w_2}-e^{i\varphi_3}\,e^{+ik_2w_2}\right\}^2.$$

$$\det\begin{pmatrix} T_{11}-e^{ik_2L-iKL} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22}-e^{-ik_2L-iKL} \end{pmatrix} = 0$$

$$\cos KL = \cos(k_2a)\cos(k_3b)-\frac{(k_2^2+k_3^2)}{2k_2k_3}\sin(k_2a)\sin(k_3b).$$

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{p(x)}}\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx\right)+\frac{C_2}{\sqrt{p(x)}}\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx\right).$$

$$\frac{C}{2}\,\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}}\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p(x)\,dx\right|\right\} \quad \text{при } U(x)>E \to$$
$$\to \frac{C}{\sqrt{p(x)}}\,\cos\left\{\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p(x)\,dx\right|-\frac{\pi}{4}\right\} \quad \text{при } U(x)<E.$$

$$\frac{C}{\sqrt{p(x)}}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_a^x p(x)\,dx + i\frac{\pi}{4}\right\} \quad \text{при } x > b \quad \to$$

$$\to \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}}\,\exp\left\{\frac{1}{\hbar}\Big|\int\limits_b^x p(x)\,dx\Big|\right\} \quad \text{при } x < b.$$

$$t = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int\limits_a^b |p(x)|\,dx\right\}.$$

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_a^b p(x)\,dx = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi\hbar}\oint p(x)\,dx = 2\times\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_a^b p(x)\,dx = n + \frac{1}{2}.$$

$$\left(\frac{\kappa}{k}\,\tan kr_1 + 1\right) = -e^{-2\kappa w}\left(\frac{k - i\kappa}{k + i\kappa}\right)\times\left(\frac{\kappa}{k}\,\tan kr_1 - 1\right).$$

$$\frac{\left(k_0^2 + \kappa_0^2\right)}{k_0\kappa_0^2}\,(1 + \kappa_0 r_1)\,(\Delta k' - i\Delta k'') = 2\,e^{-2\kappa_0 w}\frac{\left(k_0^2 - \kappa_0^2\right)}{k_0^2 + \kappa_0^2} - 4i\,e^{-2\kappa_0 w}\frac{k_0\kappa_0}{k_0^2 + \kappa_0^2}.$$

$$E'' = \frac{\hbar^2}{m}k_0\Delta k'' = \hbar\,\frac{\hbar k_0}{m}\,\frac{1}{(1 + \kappa_0 r_1)}\,\frac{4k_0^2\kappa_0^3}{\left(k_0^2 + \kappa_0^2\right)^2}\,e^{-2\kappa_0 w}.$$

$$E'' \simeq \frac{1}{2}\,\frac{\hbar}{\tau_0}\,T_0, \qquad |\Psi(r,t)| = |\psi(r,t)|\;e^{-2E''t/\hbar} \propto e^{-T_0/\tau_0\,t}$$

$$I_{1\to 2} = -2e\times\int\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\,v_{x1}f_1(E)\times[1 - f_2(E + eV)]\times t_{1\to 2}(E).$$

$$I_{2\to 1} = -2e\times\int\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3}\,v_{x2}f_2(E + eV)\times[1 - f_1(E)]\times t_{2\to 1}(E).$$

$$I = \frac{2|e|m}{(2\pi)^2\hbar^3}\,\int t(E_x)\,dE_x\int_{E_x}^{\infty}[f(E') - f(E' + |e|V)]\;dE'$$

$$I = \frac{|e|^2}{(2\pi)^2\hbar^2}\,\frac{\sqrt{2m\varphi}}{w}\,e^{-2w\sqrt{2m\varphi}/\hbar}\times V$$

$$\int_0^{\mu}\exp\left(-A\,\sqrt{\mu + \varphi - E_x}\right)\,dE_x = \frac{2}{A^2}\,\left(1 + A\sqrt{\varphi}\right)\,e^{-A\varphi}$$

$$j = j_c\sin\left[\theta_1 - \theta_2 + \frac{2e}{\hbar c}\int\limits_1^2 \mathbf{A}\cdot\mathbf{dl}\right]$$

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar}V, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi d}\right)^{-1}H$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{1}{\lambda_J^2}\sin\theta = 0, \qquad \lambda_J^2 = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2}$$

$$\theta(z) = 4\mathrm{arctg}\left(e^{\pm(z-z_0)/\lambda_J}\right)$$

$$V(t) = R\,\frac{j^2 - j_c^2}{j + j_c\cos(\omega t - \theta_1)}, \qquad \omega = \frac{2eR}{\hbar}\sqrt{j^2 - j_c^2}$$

$$\bar{V} = \frac{\hbar\omega}{2e} = R\sqrt{j^2 - j_c^2}$$

$$\cos(a\sin\Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{n=-\infty} A_n e^{in\Omega t}, \qquad A_n = J_{2k}(a), n = 2k$$

$$\sin(a\sin\Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{n=-\infty} B_n e^{in\Omega t}, \qquad A_n = J_{2k+1}(a), n = 2k+1$$

$$\bar{j}_n \propto j_c J_n(2ev/\hbar\Omega)$$

Список литературы

[1] *Туннельные явления в твердых телах*, под ред. Э. Бурштейна и С. Лундквиста, М.: – "Мир", 1973 г.
[2] Д.И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, М.: Наука, 1976 г.
[3] Е.Л. Вольф, *Принципы электронной туннельной спектроскопии*, Киев: Наукова Думка, 1990.
[4] *Задачи по физике твердого тела*, под ред. Г.Дж. Голдсмида, М.: Наука, 1976 г.
[5] Дж. Займан, *Принципы теории твердого тела*, М.: Мир, 1966.
[6] Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, М.: Мир, 1979 г.
[7] Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, М., 1978 г.
[8] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. V*, М.: Физматлит, 2001.
[9] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. III*, М.: Физматлит, 2001.
[10] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. IX*, М.: Физматлит, 2001.
[11] А.А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М.: Наука, 1987.
[12] В.Г. Левич, Ю.А. Вдовин, В.А. Мямлин, *Курс теоретической физики, т. 2*, М.: Наука, 1971.
[13] П.В. Павлов, А.Ф. Хохлов, *Физика твердого тела*, Нижний Новгород, 1993 г.
[14] В.Я. Демиховский, Г.А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*, Нижний Новгород, 2000 г.
[15] А.И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников*, Физматлит, 1962 г.
[16] В.Л. Бонч–Бруевич, С.Г. Калашников, *Физика полупроводников*, М.
[17] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков и В.И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, М.: Наука, 1981.
[18] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. III*, М.: Физматлит, 2001.
[19] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. IX*, М.: Физматлит, 2001.
[20] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, *Курс теоретической физики, т. X*, М.: Физматлит, 2001.
[21] Дж. Слэтер, *Диэлектрики, полупроводники, металлы*, М.: Мир, 1969.
[22] В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, М.: МЦНМО, 2000.